Aufnahmeprüfung 2017 BMS gibb
Mathematik

Zeit:	75 Minuten
Hilfsmittel:	Schreibzeug, Geodreieck, Zirkel, Lineal, Taschenrechner ohne CAS und ohne Solver-Funktion
Hinweis:	Die Aufgaben sind unter Angabe aller Berechnungen und Begründungen direkt auf diese Blätter zu lösen. Achten Sie auf eine saubere Darstellung. Die Seiten 14-16 stehen Ihnen bei Platzmangel zusätzlich zur Verfügung.
Punkte:	Jede der 6 Aufgaben wird mit je 6 Punkten bewertet.

Durch den/die KandidatIn auszufüllen:

Name	
Vorname	
Nummer	

Durch den/die ExpertIn auszufüllen:

Punkte	
Note	
Bemerkungen	

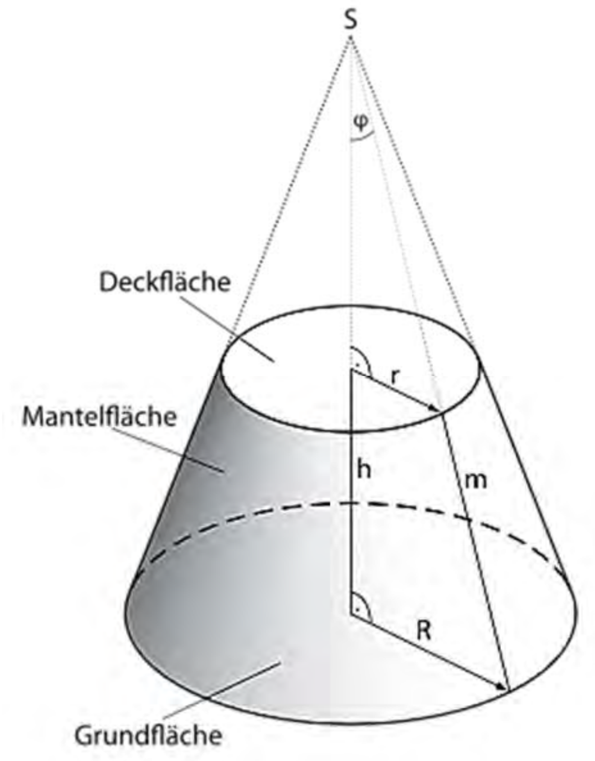
Aufgabe 1

1a) Das Volumen eines geraden Kegelstumpfes kann nach folgender Formel berechnet werden:

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Berechnen Sie das Volumen des geraden Kegelstumpfes mit den folgenden Abmessungen:

$$R = 4\,\text{cm} \quad , \quad r = \frac{1}{4}\text{cm} \quad , \quad h = \frac{1}{2}\text{cm}$$



Lösung: 1a)

Zerlegen Sie den Term in ein Produkt mit möglichst vielen Faktoren.

1b) $a^2 \cdot \frac{k}{3} + 8ab \cdot \frac{k}{3} - 20b^2 \cdot \frac{k}{3}$

Lösung: 1b)

1c) $2y\left(9x^2 - 4y^2\right) - 7x\left(9x^2 - 4y^2\right)$

Lösung: 1c)

Erreichte Punkte Aufgabe 1:

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung in der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

2a) $2[3x + 2(3x - 2)] = 4(4x - 1)$

Lösungsmenge: 2a)

2b) $x(1 - x)^2 + 10 = x(x^2 - 2x)$

Lösungsmenge: 2b)

2c) Gegeben ist die Gleichung $\frac{4x-3}{7}=2 \quad (G=\mathbb{R})$.

Die Gleichung wird nach *x* aufgelöst. Welche Umformungen sind korrekt?

Kreuzen Sie an:

☐ $x=\frac{7}{4}\cdot\left(2+\frac{3}{7}\right)$

☐ $x=\frac{7}{4}\cdot(2-3)$

☐ $x=4\cdot 7\cdot 2+3$

☐ $x=\frac{2\cdot 7+3}{4}$

☐ $x=\frac{2\cdot 7-3}{4}$

☐ Keine Antwort ist richtig.

Erreichte Punkte Aufgabe 2:

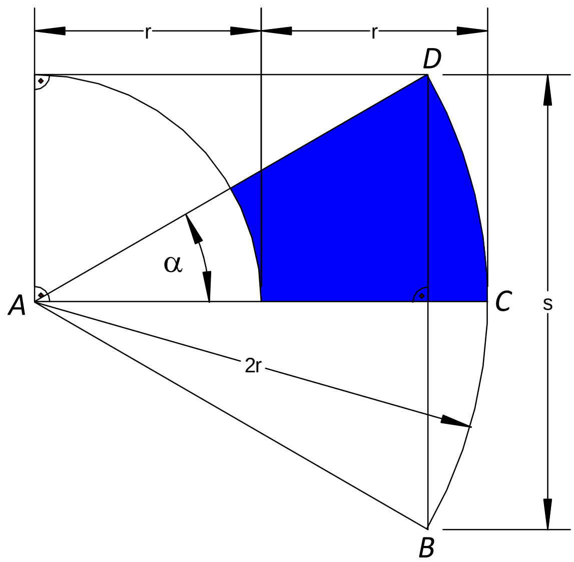
Aufgabe 3

Bestimmen Sie in der gezeichneten Figur in Abhängigkeit von *r*…

3a) …die Streckenlänge *s*.

3b) …den Winkel $\alpha = \angle CAD$.

3c) …den Inhalt der blauen Fläche.
Vereinfachen Sie das Resultat soweit möglich und lassen Sie π als Konstante stehen.
Falls Sie Aufgabe 3b) nicht lösen konnten, dann nehmen Sie $\alpha = 45°$ an.



Lösungen:	3a)	3b)
	3c)	

Erreichte Punkte Aufgabe 3:

Aufgabe 4

Damit Sie sich nach erfolgreicher Aufnahmeprüfung auf die BMS konzentrieren können, mieten Sie eine Wohnung in Bern. Für den eintägigen Umzug von Krauchthal rechnen Sie die folgenden zwei Fahrzeuge durch:

- Der VW Sharan der Eltern hat ein Ladevolumen von 2700 l.
  Sie müssen den Eltern pro gefahrenen Kilometer 50 Rp. zahlen.

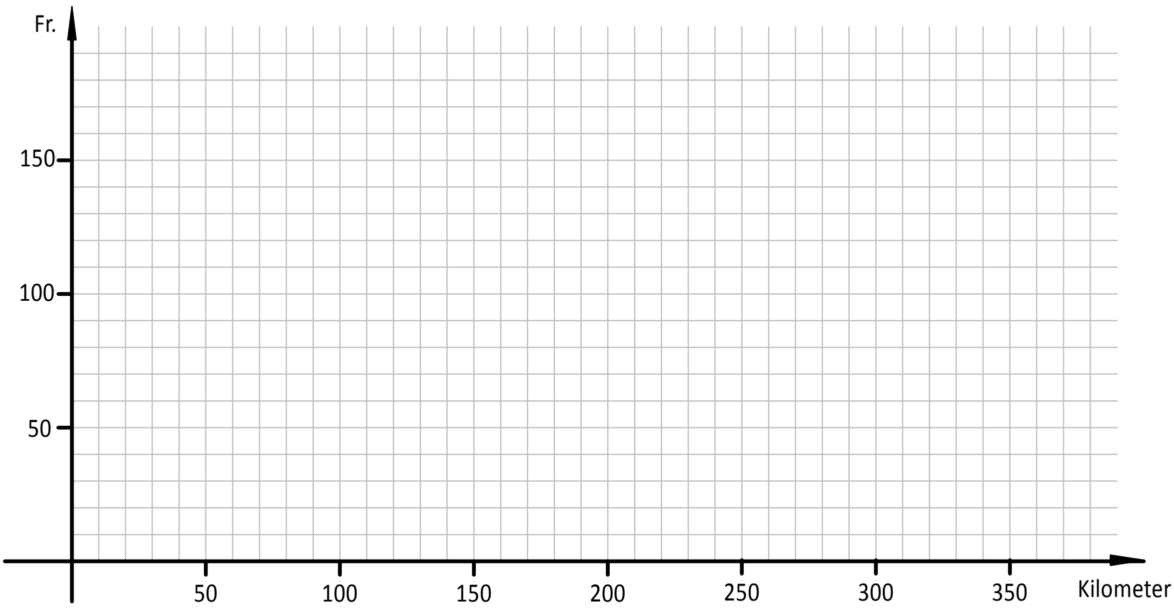
- Ein Transporter mit einem Ladevolumen von 4 m^3 kostet 50 Fr. pro Tag, darin eingeschlossen sind 150 gefahrene Kilometer. Jeder weitere Kilometer kostet 1.20 Fr. .

Sie schätzen, dass ihr Hausrat ein Volumen von 35 m^3 einnimmt. Am Ende müssen Sie das Fahrzeug wieder in Krauchthal abgeben. Nach Routenplaner liegt Bern 15 km von Krauchthal entfernt.

4a) Berechnen Sie die Kosten des VW Sharans für den Umzug an einem Tag.

4b) Berechnen Sie die Kosten des Transporters für den Umzug an einem Tag.

4c) Zeichnen Sie die Kosten (in Fr.) in Abhängigkeit der gefahrenen Kilometer der beiden Fahrzeuge in das vorgegebene Koordinatensystem ein.



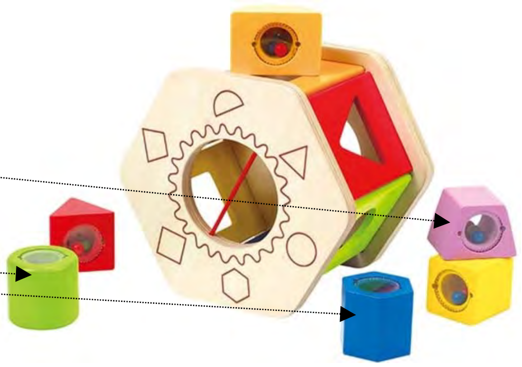
Lösungen:	4a)	4b)

Erreichte Punkte Aufgabe 4:

Aufgabe 5

Sie möchten ihrem Patenkind mit einer selbstgemachten Sortier-Box eine Freude machen. Die Körper sollten die gleichen wie auf dem Bild sein:

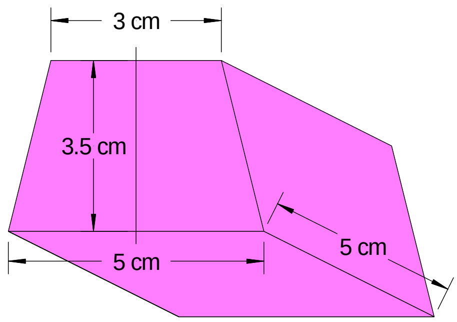
- ein gerades Prisma mit einem symmetrischen Trapez als Grundfläche
- ein gerader Zylinder
- ein gerades Prisma mit einem regulären Sechseck als Grundfläche



Alle Körper haben eine Höhe von 5 cm.

5a) Der gerade Zylinder hat einen Durchmesser von 4 cm. Berechnen Sie den Inhalt der Mantelfläche des Zylinders.

5b) Vom Prisma mit dem symmetrischen Trapez als Grundfläche sind die Masse aus der Skizze zu entnehmen. Berechnen Sie das Prismavolumen.



5c) Sie möchten verhindern, dass der Zylinder mit einem Durchmesser von 4 cm in die Öffnung der Sortier-Box des Prismas mit dem Sechseck als Grundfläche passt und umgekehrt.
Geben Sie den Bereich für die Seitenlänge *s* der Grundfläche des Sechsecks an, so dass die beiden Körper nicht vertauscht werden können.

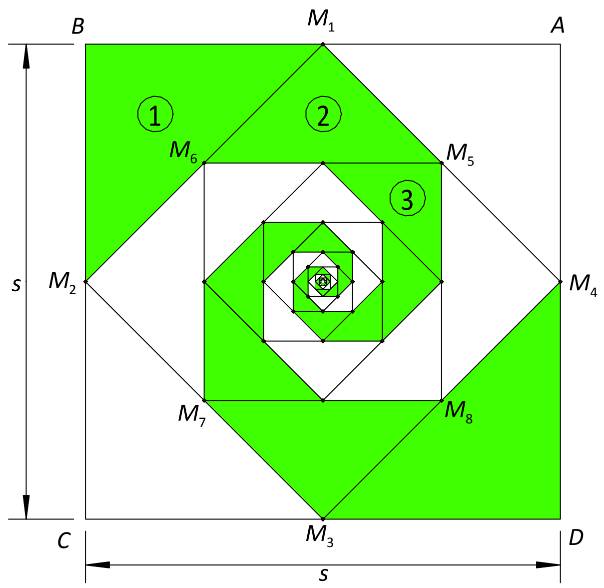
Lösungen:

5a)	5b)
5c)	

Erreichte Punkte Aufgabe 5:

Aufgabe 6

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge s.
$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ sind die Seitenmittelpunkte. Werden die vier zusammengehörenden Seitenmittelpunkte miteinander verbunden, entsteht wieder ein Quadrat, z.B. $M_1M_2M_3M_4$.
Die Folgen der Seitenmittenquadrate in den beiden Spiralen werden unendlich lange fortgesetzt.



6a) Berechnen Sie in Abhängigkeit der Seitenlänge s den Flächeninhalt der Dreiecke 1 und 2.

6b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des 20. Dreiecks, falls $s = 1000\text{km}$.

6c) Geben Sie einen Term an, mit welchem in Abhängigkeit der Seitenlänge s der Flächeninhalt des n-ten Dreiecks berechnet werden kann. Der Term muss nicht vereinfacht werden.

6d) Bestimmen Sie den gesamten Flächeninhalt der beiden grünen Spiralen ausgedrückt in s.

Lösungen:

6a)	6b)
6c)	6d)

Erreichte Punkte Aufgabe 6:

Aufnahmeprüfung 2017 BMS gibb Mathematik

Lösungen

Zeit:	75 Minuten
Hilfsmittel:	Schreibzeug, Geodreieck, Zirkel, Lineal, Taschenrechner ohne CAS und ohne Solver-Funktion
Hinweis:	Die Aufgaben sind unter Angabe aller Berechnungen und Begründungen direkt auf diese Blätter zu lösen. Achten Sie auf eine saubere Darstellung. Die Seiten 14-16 stehen Ihnen bei Platzmangel zusätzlich zur Verfügung.
Punkte:	Jede der 6 Aufgaben wird mit je 6 Punkten bewertet.

Durch den/die KandidatIn auszufüllen:

Name	
Vorname	
Nummer	

Durch den/die ExpertIn auszufüllen:

Punkte	
Note	
Bemerkungen	

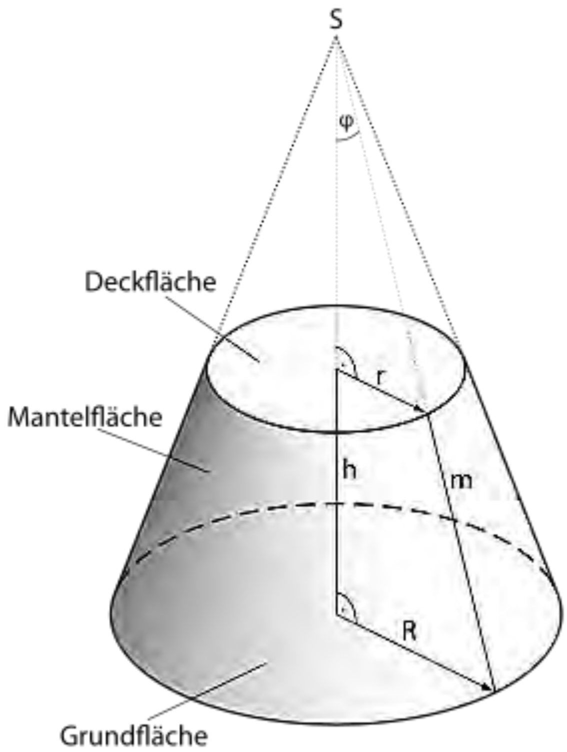
Aufgabe 1

1a) Das Volumen eines geraden Kegelstumpfes kann nach folgender Formel berechnet werden:

$$V=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right)$$

Berechnen Sie das Volumen des geraden Kegelstumpfes mit den folgenden Abmessungen:

$$R=4\,\text{cm} \quad , \quad r=\frac{1}{4}\text{cm} \quad , \quad h=\frac{1}{2}\text{cm}$$



Lösungsweg:

$$V=\underbrace{\tfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot\tfrac{1}{2}\left(4^2+4\cdot\tfrac{1}{4}+\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right)}_{\textbf{(1P)}}=\tfrac{1}{6}\cdot\pi\left(16+1+\tfrac{1}{16}\right)=\tfrac{1}{6}\cdot\pi\cdot\tfrac{273}{16}=\tfrac{91}{32}\pi\approx\underline{\underline{8.934\,\text{cm}^3}}$$

Lösung: 1a) $\underline{\underline{8.934\,\text{cm}^3}}$ **(2P)**

Zerlegen Sie den Term in ein Produkt mit möglichst vielen Faktoren.

1b) $a^2 \cdot \frac{k}{3} + 8ab \cdot \frac{k}{3} - 20b^2 \cdot \frac{k}{3}$

Lösungsweg:

$$a^2 \cdot \frac{k}{3} + 8ab \cdot \frac{k}{3} - 20b^2 \cdot \frac{k}{3} = \frac{k}{3}\left(a^2 + 8ab - 20b^2\right) = \underline{\underline{\frac{k}{3}(a-2b)(a+10b)}}$$

Nur eine Zerlegung: **(1P)**
Vollständige Zerlegung: **(2P)**

Lösung: 1b) $\underline{\underline{\frac{k}{3}(a-2b)(a+10b)}}$ **(2P)**

1c) $2y\left(9x^2 - 4y^2\right) - 7x\left(9x^2 - 4y^2\right)$

Lösungsweg:

$$2y\left(9x^2 - 4y^2\right) - 7x\left(9x^2 - 4y^2\right) = \left(9x^2 - 4y^2\right)(2y - 7x) = \underline{\underline{(3x-2y)(3x+2y)(2y-7x)}}$$

Nur eine Zerlegung: **(1P)**
Vollständige Zerlegung: **(2P)**

Lösung: 1c) $\underline{\underline{(3x-2y)(3x+2y)(2y-7x)}}$ **(2P)**

Erreichte Punkte Aufgabe 1: **(6P)**

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung in der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

2a) $2[3x + 2(3x - 2)] = 4(4x - 1)$

Lösungsweg:

$$\begin{aligned} 2[3x + 2(3x - 2)] &= 4(4x - 1) \\ 2[3x + 6x - 4] &= 16x - 4 \\ 2[9x - 4] &= 16x - 4 \\ 18x - 8 &= 16x - 4 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Korrektes Auflösen der Klammern: **(1P)**

Lösungsmenge: 2a) $\underline{\underline{L = \{2\}}}$ **(2P)**

2b) $x(1 - x)^2 + 10 = x(x^2 - 2x)$

Lösungsweg:

$$\begin{aligned} x(1 - x)^2 + 10 &= x(x^2 - 2x) \\ x(1 - 2x + x^2) + 10 &= x^3 - 2x^2 \\ x - 2x^2 + x^3 + 10 &= x^3 - 2x^2 \\ x + 10 &= 0 \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Korrektes Ausmultiplizieren: **(1P)**

Lösungsmenge: 2b) $\underline{\underline{L = \{-10\}}}$ **(2P)**

2c) Gegeben ist die Gleichung $\frac{4x-3}{7}=2 \quad (G=\mathbb{R})$.

Die Gleichung wird nach x aufgelöst. Welche Umformungen sind korrekt?

Kreuzen Sie an:

☒ $x=\frac{7}{4}\cdot\left(2+\frac{3}{7}\right)$

☐ $x=\frac{7}{4}\cdot(2-3)$

☐ $x=\frac{2\cdot 7}{4}+3$

☒ $x=\frac{2\cdot 7+3}{4}$

☐ $x=\frac{2\cdot 7-3}{4}$

☐ Keine Antwort ist richtig.

0 Fehlentscheide: **(2P)**
1 Fehlentscheid: **(1P)**
2-6 Fehlentscheide: **(0P)**

Erreichte Punkte Aufgabe 2: **(6P)**

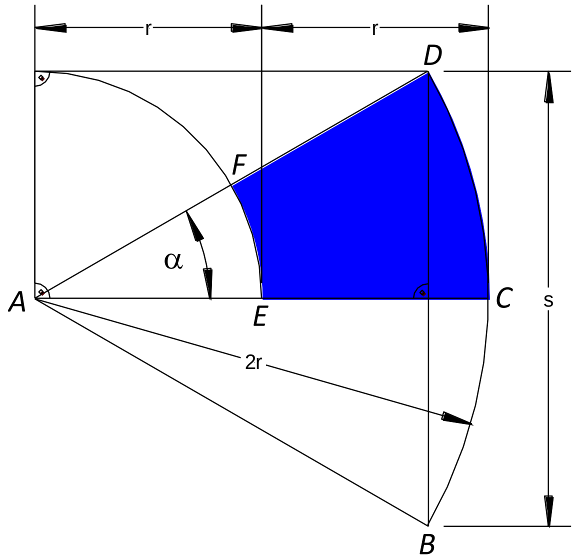
Aufgabe 3

Bestimmen Sie in der gezeichneten Figur in Abhängigkeit von *r*...

3a) ...die Streckenlänge *s*.

3b) ...den Winkel $\alpha = \angle CAD$.

3c) ...den Inhalt der blauen Fläche.
Vereinfachen Sie das Resultat soweit möglich und lassen Sie π als Konstante stehen.
Falls Sie Aufgabe 3b) nicht lösen konnten, dann nehmen Sie $\alpha = 45°$ an.



Lösungswege:

3a) $s = |BD| = \underline{\underline{2r}}$

3b) $\angle CAD = \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot \angle BAD}_{} = \tfrac{1}{2} \cdot 60° = \underline{\underline{30°}}$

(1P)

3c) Falls $\alpha = 30°$:

$$A_{\text{blau}} = \underbrace{A_{\text{Sek}(CAD)} - A_{\text{Sek}(EAF)}}_{\text{Vorgehen}} = \underbrace{\pi \cdot (2r)^2 \cdot \tfrac{30}{360} - \pi \cdot r^2 \cdot \tfrac{30}{360}}_{\text{Formel Sektorfläche}} = \pi \cdot 4r^2 \cdot \tfrac{1}{12} - \pi \cdot r^2 \cdot \tfrac{1}{12} = \tfrac{3\pi}{12} r^2 = \underline{\underline{\tfrac{\pi}{4} r^2}}$$

Falls $\alpha = 45°$:

$$A_{\text{blau}} = \underbrace{A_{\text{Sek}(CAD)} - A_{\text{Sek}(EAF)}}_{\text{Vorgehen}} = \underbrace{\pi \cdot (2r)^2 \cdot \tfrac{45}{360} - \pi \cdot r^2 \cdot \tfrac{45}{360}}_{\text{Formel Sektorfläche}} = \pi \cdot 4r^2 \cdot \tfrac{1}{8} - \pi \cdot r^2 \cdot \tfrac{1}{8} = \underline{\underline{\tfrac{3\pi}{8} r^2}}$$

Korrektes Vorgehen: **(1P)**
Korrekte Formel für die Sektorfläche: **(1P)**
Korrektes Vorgehen, korrekte Formel und korrekte Berechnung/Vereinfachung: **(3P)**

Lösungen:

3a) $\underline{\underline{2r}}$ **(1P)**	3b) $\underline{\underline{30^\circ}}$ **(2P)**
3c) $\underline{\underline{\frac{\pi}{4}r^2}}$ (falls $\alpha = 45^\circ$: $\underline{\underline{\frac{3\pi}{8}r^2}}$) **(3P)**	

Erreichte Punkte Aufgabe 3:	**(6P)**

Aufgabe 4

Damit Sie sich nach erfolgreicher Aufnahmeprüfung auf die BMS konzentrieren können, mieten Sie eine Wohnung in Bern. Für den eintägigen Umzug von Krauchthal rechnen Sie die folgenden zwei Fahrzeuge durch:

- Der VW Sharan der Eltern hat ein Ladevolumen von 2700 l.
  Sie müssen den Eltern pro gefahrenen Kilometer 50 Rp. zahlen.

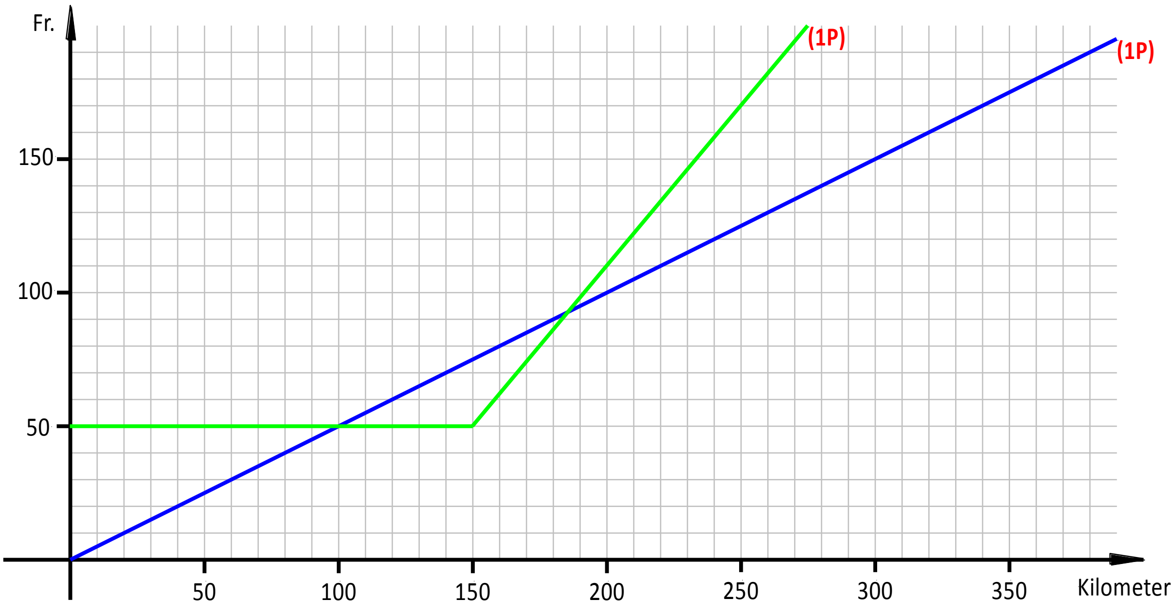
- Ein Transporter mit einem Ladevolumen von 4 m^3 kostet 50 Fr. pro Tag, darin eingeschlossen sind 150 gefahrene Kilometer. Jeder weitere Kilometer kostet 1.20 Fr. .

Sie schätzen, dass ihr Hausrat ein Volumen von 35 m^3 einnimmt. Am Ende müssen Sie das Fahrzeug wieder in Krauchthal abgeben. Nach Routenplaner liegt Bern 15 km von Krauchthal entfernt.

4a) Berechnen Sie die Kosten des VW Sharans für den Umzug an einem Tag.

4b) Berechnen Sie die Kosten des Transporters für den Umzug an einem Tag.

4c) Zeichnen Sie die Kosten (in Fr.) in Abhängigkeit der gefahrenen Kilometer der beiden Fahrzeuge in das vorgegebene Koordinatensystem ein.



Lösungswege:

4a) Anzahl Fahrten: $\frac{35}{2.7} \approx 12.963$

Es folgt: 13 Fahrten von Krauchthal nach Bern und zurück sind notwendig. **(1P)**

Zurückzulegende Strecke: $13 \cdot 2 \cdot 15 = 390\text{km}$

Kosten: $390 \cdot 0.5 = \underline{\underline{195\,\text{Fr.}}}$

4b) Anzahl Fahrten: $\frac{35}{4} \approx 8.75$

Es folgt: 9 Fahrten von Krauchthal nach Bern und zurück sind notwendig. **(1P)**

Zurückzulegende Strecke: $9 \cdot 2 \cdot 15 = 270\text{km}$

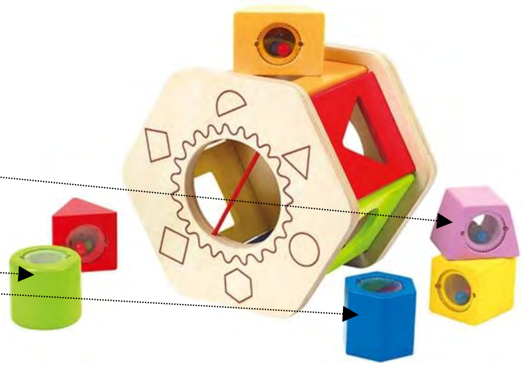
Kosten: $50 + (270 - 150)1.2 = 50 + 120 \cdot 1.2 = 50 + 144 = \underline{\underline{194\,\text{Fr.}}}$

Lösungen:	4a) $\underline{\underline{195\,\text{Fr.}}}$ **(2P)**	4b) $\underline{\underline{194\,\text{Fr.}}}$ **(2P)**

Erreichte Punkte Aufgabe 4:

Aufgabe 5

Sie möchten ihrem Patenkind mit einer selbstgemachten Sortier-Box eine Freude machen. Die Körper sollten die gleichen wie auf dem Bild sein:

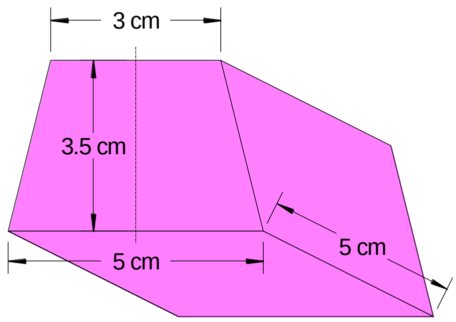


- ein gerades Prisma mit einem symmetrischen Trapez als Grundfläche
- ein gerader Zylinder
- ein gerades Prisma mit einem regulären Sechseck als Grundfläche

Alle Körper haben eine Höhe von 5 cm.

5a) Der gerade Zylinder hat einen Durchmesser von 4 cm. Berechnen Sie den Inhalt der Mantelfläche des Zylinders.

5b) Vom Prisma mit dem symmetrischen Trapez als Grundfläche sind die Masse aus der Skizze zu entnehmen. Berechnen Sie das Prismavolumen.



5c) Sie möchten verhindern, dass der Zylinder mit einem Durchmesser von 4 cm in die Öffnung der Sortier-Box des Prismas mit dem Sechseck als Grundfläche passt und umgekehrt.
Geben Sie den Bereich für die Seitenlänge *s* der Grundfläche des Sechsecks an, so dass die beiden Körper nicht vertauscht werden können.

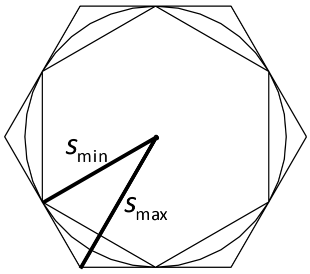
Lösungswege:

5a) $M = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi \approx \underline{\underline{62.832\,\text{cm}^2}}$

5b) Grundfläche (Trapezfläche): $G = \frac{5+3}{2} \cdot 3.5 = 4 \cdot 3.5 = 14\,\text{cm}^2$ **(1P)**

Prismavolumen: $V = G \cdot h = 14 \cdot 5 = \underline{\underline{70\,\text{cm}^3}}$

5c) Skizze: **(1P)**



$s_{\text{min}} = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\,\text{cm}$ **(1P)**

$s_{\text{max}} = \frac{2}{\sqrt{3}} s_{\text{min}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2.309\,\text{cm}$ **(1P)**

Gesuchter Bereich: $\underline{\underline{2\,\text{cm} < s < 2.309\,\text{cm}}}$

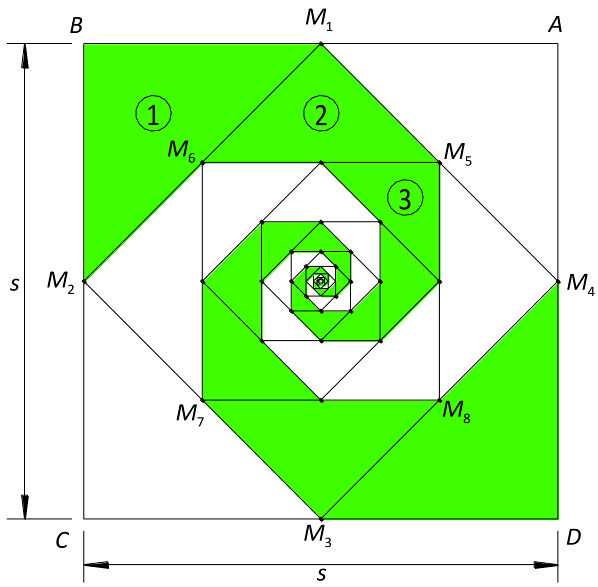
Lösungen:

5a) $\underline{\underline{62.832\,\text{cm}^2}}$ **(1P)**	5b) $\underline{\underline{70\,\text{cm}^3}}$ **(2P)**
5c) $\underline{\underline{2\,\text{cm} < s < 2.309\,\text{cm}}}$ **(3P)**	

Erreichte Punkte Aufgabe 5:

Aufgabe 6

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge *s*.
$M_1, M_2, M_3, ..., M_n$ sind die Seitenmittelpunkte. Werden die vier zusammengehörenden Seitenmittelpunkte miteinander verbunden, entsteht wieder ein Quadrat, z.B. $M_1M_2M_3M_4$.
Die Folgen der Seitenmittenquadrate in den beiden Spiralen werden unendlich lange fortgesetzt.



6a) Berechnen Sie in Abhängigkeit der Seitenlänge *s* den Flächeninhalt der Dreiecke 1 und 2.

6b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des 20. Dreiecks, falls $s = 1000\,\text{km}$.

6c) Geben Sie einen Term an, mit welchem in Abhängigkeit der Seitenlänge *s* der Flächeninhalt des *n*-ten Dreiecks berechnet werden kann. Der Term muss nicht vereinfacht werden.

6d) Bestimmen Sie den gesamten Flächeninhalt der beiden grünen Spiralen ausgedrückt in *s*.

Lösungswege:

6a) $A_1 = \frac{1}{8}s^2$ **(1P)**

$A_2 = \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}s^2 = \frac{1}{16}s^2$ **(1P)**

6b) Für $s = 1000\,\text{km}$:

$A_1 = \frac{1}{8}\cdot 1000^2 = 125\,000\,\text{km}^2$

$A_{20} = A_1 \cdot \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{19}} = 1250\,000\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{19} \approx 0.238\,\text{km}^2$

(1P)

6c) $A_n = \frac{1}{8}s^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

6d) $A = \frac{1}{2}s^2$

Lösungen:

6a) $A_1 = \frac{1}{8}s^2$, $A_2 = \frac{1}{16}s^2$ **(2P)**	6b) $0.238\,\text{km}^2$ **(2P)**
6c) $\frac{1}{8}s^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ **(1P)**	6d) $\frac{1}{2}s^2$ **(1P)**

Erreichte Punkte Aufgabe 6: